

## ANÁLISE MATEMÁTICA IV

### FICHA SUPLEMENTAR 2

#### LOGARITMOS E INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES COMPLEXAS

##### Logaritmos

- (1) Para cada um dos seguintes conjuntos  $Z \subset \mathbb{C}$ , esboce o conjunto

$$W = \{w \in \mathbb{C} : e^w \in Z\}$$

dos seus logaritmos.

- (a)  $Z = \{z \in \mathbb{C} : |z| > e\}$ ;
- (b)  $Z = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ ;
- (c)  $Z = \{z \in \mathbb{C} : \frac{1}{e} < |z| < e^2, -\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi\}$ .

##### Definição de Integral

- (2) Calcule pela definição o integral de  $f(z) = z - 1$  ao longo da curva de  $z = 0$  para  $z = 2$  que consiste em:
- (a) semicircunferência parametrizada por  $z = 1 + e^{i\theta}$ ,  $\pi \leq \theta \leq 2\pi$ ;
  - (b) segmento real parametrizado por  $z = x$ ,  $0 \leq x \leq 2$ .
- Explique porque é que as respostas a (a) e (b) têm que ser iguais.
- (3) Calcule pela definição o integral de  $f(z) = \pi e^{\pi \bar{z}}$  ao longo da fronteira do quadrado com vértices nos pontos  $0, 1, 1 + i$  e  $i$ , percorrida uma vez no sentido positivo.

##### Fórmulas Integrais e Teorema de Cauchy

- (4) Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0,$$

para qualquer inteiro positivo,  $n$ , e para qualquer curva fechada simples,  $\gamma$ , envolvendo  $z_0$  uma vez no sentido positivo.

**Resolução:** Pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

para qualquer inteiro positivo,  $n$ , para qualquer curva fechada simples,  $\gamma$ , envolvendo  $z_0$  uma vez no sentido positivo, com  $f$  uma função analítica numa região simplesmente conexa contendo  $\gamma$ . Quando  $f(z) = 1$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ , tem-se  $f^{(n)}(z) = 0$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n = 1, 2, \dots$ , e obtém-se

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^{n+1}} = 0.$$

□

- (5) Calcule os seguintes integrais complexos sobre a circunferência de raio 1 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.

(a)

$$\oint \frac{e^z}{z^n} dz \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

(b)

$$\oint e^{\frac{1}{z-2}} dz .$$

- (6) Seja  $\gamma$  a circunferência de raio 2 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo. Calcule os seguintes integrais:

(a)

$$\int_{\gamma} \cos(e^{\sin z}) dz ;$$

(b)

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{2z+i} dz ;$$

(c)

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2} dz ;$$

(d)

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^9} dz .$$

**Resolução:**

- (a) A função  $\cos(e^{\sin z})$  é analítica em  $\mathbb{C}$ . Pelo teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \cos(e^{\sin z}) dz = 0 .$$

- (b) A função  $\frac{e^z}{2}$  é analítica em  $\mathbb{C}$ . Pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z + \frac{i}{2}} dz = 2\pi i \left. \frac{e^z}{2} \right|_{z=-\frac{i}{2}} = \pi i e^{-\frac{i}{2}} .$$

- (c) A função  $\frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2}$  é analítica, por exemplo, num disco de raio 4 centrado na origem o qual contém  $\gamma$ . Pelo teorema de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \frac{e^{\sin z}}{(z+5i)^2} dz = 0 .$$

- (d) A função  $\cos z$  é analítica em  $\mathbb{C}$ . Pela fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^9} dz = \frac{2\pi i}{8!} \left. \frac{d^8}{dz^8} (\cos z) \right|_{z=i} .$$

Como  $\frac{d^4}{dz^4} \cos z = \cos z$ , tem-se

$$\left. \frac{d^8}{dz^8} (\cos z) \right|_{z=i} = \cos i = \frac{e^{-1} + e^1}{2} .$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \frac{\cos z}{(z-i)^9} dz = \frac{\pi i}{8!} \left( e + \frac{1}{e} \right).$$

□

- (7) Calcule os seguintes integrais complexos sobre a circunferência de raio 2 centrada na origem e percorrida uma vez no sentido positivo.

(a)

$$\oint \frac{e^z}{(z-1)^n} dz \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

(b)

$$\oint \sin \left( \frac{1}{z-\pi} \right) dz.$$

### Séries de Laurent

- (8) Mostre que o desenvolvimento em série de Laurent

$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots$$

é válido para  $0 < |z| < +\infty$ .

**Resolução:** Para qualquer  $z \in \mathbb{C}$ , vale o seguinte desenvolvimento

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

Logo, para qualquer  $z \neq 0$ , é válido o seguinte desenvolvimento

$$\begin{aligned} \frac{e^z}{z} &= \frac{1}{z} \left( 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \dots \end{aligned}$$

Este tem que ser o desenvolvimento em série de Laurent em torno de 0 válido para  $0 < |z| < +\infty$ , porque o desenvolvimento de qualquer função analítica em potências (positivas ou negativas) de  $(z - z_0)$  válido numa determinada coroa circular é único. □

**Comentário:** O termo válido significa que o desenvolvimento é convergente e converge para a função em causa. ◇

- (9) Determine os desenvolvimentos em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{z}{z-1}$$

em torno dos seguintes pontos: (a)  $z_0 = 0$  e (b)  $z_0 = 1$ .

**Resolução:**

(a) Para  $|z| < 1$ , tem-se

$$\frac{z}{z-1} = -z \cdot \frac{1}{1-z} = -z \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} -z^k,$$

onde se usou a soma da série geométrica de razão  $z$  com  $|z| < 1$ . Este desenvolvimento vale para qualquer  $z$  com  $|z| < 1$ , pelo que é necessariamente a série de Taylor em torno de 0, a qual neste caso é também a série de Laurent.

Para  $|z| > 1$ , tem-se

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k},$$

onde se usou a soma da série geométrica de razão  $\frac{1}{z}$  com  $|\frac{1}{z}| < 1$ . Este desenvolvimento vale para qualquer  $z$  com  $|z| > 1$ , pelo que é a série de Laurent em torno de 0 para a coroa  $1 < |z| < \infty$ .

(b) Para  $z \neq 1$ , tem-se

$$\frac{z}{z-1} = \frac{1}{z-1} + 1.$$

Este desenvolvimento vale na coroa  $0 < |z-1| < \infty$ , pelo que é necessariamente a série de Laurent em torno de 1 nessa coroa.

□

**Comentário:** Para qualquer função analítica  $f$ , existe um único desenvolvimento em potências (positivas ou negativas) de  $z-z_0$  válido em cada coroa circular,  $r_1 < |z-z_0| < r_2$ , contida do domínio de  $f$ . ◇

**Singularidades, Resíduos, Etc.**

(10) Seja  $f$  a função definida por

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z.$$

- Determine o domínio de  $f$ , indique os pontos onde a função é analítica e classifique as suas singularidades.
- Calcule os resíduos de  $f$  nessas singularidades.
- Calcule o integral de  $f$  ao longo da circunferência de raio 3 centrada na origem percorrida uma vez no sentido positivo.
- Determine os valores possíveis para o integral de  $f$  sobre curvas fechadas simples contidas no domínio de  $f$ .
- Determine o raio de convergência do desenvolvimento de  $f$  em série de potências de  $z-i$ , sem calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

**Resolução:**

(a) A função  $f$  está definida e é analítica sempre que o denominador não se anular, ou seja sempre que  $z \neq 0$  e  $z \neq 2$ . Assim, o domínio de  $f$  é  $\mathbb{C} \setminus \{0, 2\}$ . A singularidade  $z = 0$  é um pólo duplo porque o limite

$$\lim_{z \rightarrow 0} [z^2 f(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{e^z}{z-2} + z^2 \sin z \right) = -\frac{1}{2}$$

existe e não é zero.

A singularidade  $z = 2$  é um pólo simples porque o limite

$$\lim_{z \rightarrow 2} [(z-2)f(z)] = \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{e^z}{z^2} + (z-2) \sin z \right) = \frac{e^2}{4}$$

existe e não é zero.

(b)

$$\begin{aligned} \text{Res}_0 f &= \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz} \left[ z^2 \left( \frac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{e^z(z-2) - e^z}{(z-2)^2} + 2z \sin z + z^2 \cos z \right) = -\frac{3}{4} . \\ \text{Res}_2 f &= \lim_{z \rightarrow 2} \left[ (z-2) \left( \frac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z \right) \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{e^z}{z^2} + (z-2) \sin z \right) = \frac{e^2}{4} . \end{aligned}$$

**Comentário:** O limite envolvido no cálculo do resíduo só coincide com o limite usado no cálculo para a determinação do tipo de singularidade no caso de pólos simples. Para outras singularidades os limites são diferentes, como se nota aqui no caso de  $z = 0$ .  $\diamond$

(c) A circunferência de raio 3 centrada na origem envolve as singularidades 0 e 2. Pelo teorema dos resíduos,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \left( \frac{e^z}{z^2(z-2)} + \sin z \right) dz &= 2\pi i (\text{Res}_0 f + \text{Res}_2 f) \\ &= 2\pi i \left( -\frac{3}{4} + \frac{e^2}{4} \right) \\ &= \frac{e^2 - 3}{2} \pi i . \end{aligned}$$

(d) Para efeitos do integral de  $f$ , há quatro tipos de curvas fechadas simples contidas no domínio de  $f$  e percorridas no sentido positivo:

- (i) curvas que não envolvem qualquer das singularidades,
- (ii) curvas que envolvem  $z = 0$ , mas não envolvem  $z = 2$ ,
- (iii) curvas que envolvem  $z = 2$  mas não envolvem  $z = 0$ , e
- (iv) curvas que envolvem ambas as singularidades  $z = 0$  e  $z = 2$ .

Pelo teorema dos resíduos (ou teorema de Cauchy e fórmula integral de Cauchy), os integrais ao longo dessas curvas são:

- (i) 0,
- (ii)  $2\pi i \text{Res}_0 f = -\frac{3}{2}\pi i$ ,
- (iii)  $2\pi i \text{Res}_2 f = \frac{e^2 \pi i}{2}$ , e
- (iv)  $2\pi i (\text{Res}_0 f + \text{Res}_2 f) = \frac{e^2 - 3}{2} \pi i$ .

As curvas dos tipos semelhantes mas percorridas no sentido oposto dão valores simétricos para o integral. Logo, há os seguintes sete valores possíveis para o integral de  $f$  sobre curvas fechadas simples contidas no domínio de  $f$ :

$$0, -\frac{3}{2}\pi i, \frac{3}{2}\pi i, \frac{e^2 \pi i}{2}, -\frac{e^2 \pi i}{2}, \frac{e^2 - 3}{2} \pi i, \frac{3 - e^2}{2} \pi i .$$

**Comentário:** Se as curvas não forem simples, i.e., puderem intersectar-se a si próprias, então o integral pode assumir valores que sejam combinações com coeficientes inteiros dos sete números acima. Por exemplo, sobre uma curva que envolva  $z = 2$  com dez voltas no sentido positivo e que não envolva  $z = 0$ , o integral será igual a  $5e^2 \pi i$ .  $\diamond$

(e) O teorema da série de Taylor garante que a série de Taylor de  $f$  em torno de  $i$  converge em qualquer disco centrado em  $i$  onde  $f$  seja analítica; o maior disco (aberto) nestas

condições tem raio 1. Logo, o raio de convergência desta série de Taylor é pelo menos 1.

Sobre a circunferência de raio 1 centrada em  $i$  existe um ponto singular,  $z = 0$ , onde o limite de  $f$  é infinito, mesmo quando se toma o limite com  $|z| < 1$ . Como a série de Taylor de  $f$  coincide com  $f$  no disco  $|z| < 1$ , conclui-se que a série de Taylor de  $f$  diverge em  $z = 0$ .

Portanto, 1 é o raio do maior disco (aberto) onde a série de Taylor de  $f$  em torno de  $i$  converge, ou seja, 1 é o raio de convergência da série de Taylor de  $f$  em torno de  $i$ .

**Comentário:** Este tipo de argumento vale quando a(s) singularidade(s) mais próxima(s) do centro da série são pólos ou singularidades essenciais. Se  $z = 0$  fosse uma singularidade removível, a série já poderia convergir para raios maiores mesmo que não convergisse para os valores da função. Por exemplo a série de Taylor da função

$$f(z) = \begin{cases} e^z, & |z| < 1 \\ 0, & |z| \geq 1 \end{cases}$$

em torno da origem é a série usual da exponencial, tem raio de convergência  $+\infty$ , mas só coincide com a função para  $|z| < 1$ .  $\diamond$

□

(11) Seja  $f$  a função complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{e^z}{z-2}.$$

- Determine e classifique as singularidades de  $f$ .
- Determine o desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent válido na coroa  $0 < |z-1| < 1$ .
- Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral de  $f$  ao longo da circunferência de raio 1 centrada em  $z = \frac{1}{2}$  percorrida uma vez no sentido positivo.
- Determine o raio de convergência do desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor em torno de  $z_0 = i$ , sem calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

(12) Considere a seguinte função  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$u(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy(x + y)$$

- Mostre que  $u$  é uma função harmónica.
- Determine a função  $v$  tal que  $f = u + iv$  é analítica (uma tal função diz-se uma harmónica conjugada de  $u$ ) e tal que  $v(0, 0) = 0$ .
- Calcule

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-1} dz,$$

onde  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ,  $z = x + iy$  e  $\gamma$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$  percorrida no sentido positivo.

(13) Seja  $f$  a função complexa definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(2-z)} - \frac{e^{z-1}}{z-1}.$$

- Determine o desenvolvimento de  $f$  em série de Laurent válido na coroa  $0 < |z-1| < 1$ .

- (b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular o integral de  $f$  ao longo da circunferência de raio 1 centrada em  $z = \frac{1}{2}$  percorrida uma vez no sentido positivo.
- (c) Determine o raio de convergência do desenvolvimento de  $f$  em série de Taylor em torno de  $z_0 = 2i$ , sem calcular os coeficientes desse desenvolvimento.

### Aplicações ao Cálculo de Integrais Reais

- (14) Seja  $\gamma_R$  a curva fechada simples dada pela fronteira do semi-círculo,

$$D_R = \{z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi\},$$

de raio  $R > 1$ , percorrida no sentido positivo.

- (a) Calcule o seguinte integral:

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz.$$

- (b) Mostre que

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{R\pi}{R^2 - 1},$$

onde  $\Gamma_R$  é a “sub-curva” de  $\gamma_R$  dada pela semi-circunferência

$$\{z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

- (c) Prove que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{e}.$$

**Sugestão:** Alíneas (a) e (b).

### **Resolução:**

- (a) A função  $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$  tem apenas uma singularidade na região limitada por  $\gamma_R$ :  $z = i$  é um pólo simples porque é um zero simples do denominador de  $f$ . Pelo teorema dos resíduos,

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_i f = 2\pi i \left. \frac{e^{iz}}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{e}.$$

- (b) Sobre  $\Gamma_R$  é válida a seguinte majoração do módulo de  $f$ :

$$\left| \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} \right| = \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + 1|} \leq \frac{1}{R^2 - 1}$$

porque  $|e^{iz}| = e^{-\operatorname{Im} z} \leq 1$  e  $|z^2 + 1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1$ . O comprimento da semi-circunferência  $\Gamma_R$  é  $\pi R$ . Logo,

$$\left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} \pi R = \frac{R\pi}{R^2 - 1}.$$

- (c) O integral da alínea (a) é constante em  $R$ , para  $R > 1$ . No limite,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{e} &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \\ &= \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x + i \sin x}{x^2 + 1} dx + \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2 + 1} dz \end{aligned}$$

O integral  $\int_{-R}^{+R} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$  é zero porque a integranda é uma função ímpar. Pela majoração da alínea (b),

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz \right| \leq \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{R\pi}{R^2-1} = 0$$

e, consequentemente,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2+1} dz = 0 .$$

Conclui-se que

$$\frac{\pi}{e} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx .$$

□

(15) Seja  $f$  a função definida por

$$f(z) = \frac{z^2}{z^4+1}$$

(a) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz$$

onde  $\gamma_R$  é a fronteira do semicírculo

$$D_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$$

de raio  $R > 1$  percorrida uma vez no sentido positivo.

(b) Mostre que

$$\left| \oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{z^4+1} dz \right| \leq \frac{\pi R^3}{R^4-1}$$

onde  $\Gamma_R$  é a porção de  $\gamma_R$  correspondente à semicircunferência.

(c) Utilize o resultado das alíneas anteriores para calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx$$

(16) Considere a função

$$f(z) = \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1}$$

(a) Use o teorema dos resíduos para calcular o integral

$$\oint_{\gamma} \frac{z}{z^4 - 10z^2 + 1} dz$$

onde  $\gamma$  é a circunferência  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  percorrida uma vez no sentido positivo.

(b) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular o integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin^2 \theta} d\theta$$



**Resolução:**

(a) As singularidades da função integranda são os zeros do polinómio  $z^4 - 10z^2 + 1$ :

$$\begin{aligned} z^4 - 10z^2 + 1 = 0 &\Leftrightarrow z^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4}}{2} \\ &\Leftrightarrow z^2 = 5 \pm \sqrt{24} \\ &\Leftrightarrow z = \pm \sqrt{5 \pm \sqrt{24}} \end{aligned}$$

Destes quatro pontos, os que se encontram no interior do contorno de integração são  $z = \pm \sqrt{5 - \sqrt{24}}$  e ambos estes pontos são polos simples da função integranda. Temos

$$\begin{aligned} \text{Res}_{z=\sqrt{5-\sqrt{24}}} f(z) &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{5-\sqrt{24}}} \left( z - \sqrt{5-\sqrt{24}} \right) f(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow \sqrt{5-\sqrt{24}}} \frac{z}{(z^2 - 5 - \sqrt{24})(z + \sqrt{5 + \sqrt{24}})} \\ &= -\frac{1}{8\sqrt{6}} \end{aligned}$$

e analogamente,

$$\text{Res}_{z=-\sqrt{5-\sqrt{24}}} f(z) = -\frac{1}{8\sqrt{6}}$$

Portanto, pelo teorema dos resíduos,

$$\oint_{\gamma_R} \frac{z^2}{z^4 + 1} dz = -\frac{2\pi i}{4\sqrt{6}} = -\frac{\pi i}{\sqrt{24}}$$

(b) Temos  $\gamma = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ . Como

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

concluimos que definindo

$$g(z) = \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^2}$$

se tem

$$g(e^{i\theta}) = \frac{1}{2 + \sin^2 \theta}$$

O integral de  $g$  sobre a circunferência não é ainda o integral que queremos calcular porque ao substituir na definição de integral, se obtém

$$\oint_{\gamma} g(z) dz = \int_0^{2\pi} g(e^{i\theta}) i e^{i\theta} d\theta$$

Mas para eliminar o termo  $i e^{i\theta}$  basta dividir  $g(z)$  por  $iz$ . Assim, concluimos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin^2 \theta} = \oint_{\gamma} \frac{1}{2 + \left(\frac{z - \frac{1}{z}}{2i}\right)^2} \frac{dz}{iz}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{iz \left( 2 + \left( \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} \right)^2 \right)} &= \frac{1}{iz \left( 2 - \frac{1}{4} \left( z^2 - 2 + \frac{1}{z^2} \right) \right)} \\ &= -\frac{4z}{i(z^4 - 10z^2 + 1)} \end{aligned}$$

da alínea anterior concluímos que

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin^2 \theta} d\theta = \frac{4}{i} \frac{\pi i}{\sqrt{24}} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$$

□

(17) (a) Determine e classifique todas as singularidades de

$$f(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2 (2z^2 + 5z + 2)} .$$

(b) Utilize o teorema dos resíduos para calcular

$$\oint_{\gamma} \frac{z^4 + 1}{z^2 (2z^2 + 5z + 2)} dz ,$$

onde  $\gamma$  é a curva  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  percorrida no sentido positivo.

(c) Aproveite o resultado da alínea anterior para calcular

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)}{5 + 4 \cos(\theta)} d\theta .$$